

Curs 12

Programarea liniară: algoritmul simplex (I)

Modelarea și analiza datelor pentru decizii de management

Conf.dr.ing. Lăcrimioara GRAMA

Anul 2 master · Tehnologii, Sisteme și Aplicații pentru eActivități

Facultatea de Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca



Cursul precedent



Analiza și prognoza seriilor temporale (II)

- ✓ Prognoza utilizând metode de trend
 - ✓ Trend liniar
 - ✓ Trend neliniar: model quadratic și model exponențial
- ✓ Prognoza utilizând metode de sezonabilitate
 - ✓ Sezonabilitate fără trend
 - ✓ Sezonabilitate și trend
 - ✓ Metode bazate pe date lunare

La finalul acestui curs, studenții vor putea să:

- explice rolul algoritmului simplex în rezolvarea problemelor de programare liniară
- transforme un model LP în formă standard prin introducerea variabilelor de reducere
- identifice soluții de bază și soluții de bază admisibile
- construiască tabloul simplex inițial pentru o problemă de maximizare cu restricții de tip $\leq$
- aplice criteriile de introducere și eliminare a variabilelor din bază
- interpreteze soluția optimă obținută din tabloul simplex final

Obiectivele cursului



Cuprins

Algoritmul simplex – procedură algebrică

- Forma standard
 - Proprietăți algebrice
 - Soluția de bază
 - Soluția de bază admisibilă

Forma tablou / tabelară

- Tabloul simplex inițial
- Îmbunătățirea soluției

Următorul tablou

- Interpretarea rezultatelor primei iterații
- Căutarea soluției optime
- Interpretarea soluției optime

Rezumat

Algoritmul simplex – procedură algebrică

De ce este necesar algoritmul simplex?

- Metoda grafică este utilă doar pentru probleme LP cu două variabile
- Problemele reale au multe variabile și constrângeri
- Algoritmul simplex permite rezolvarea iterativă a problemelor LP mari, cu mii de variabile și constrângeri

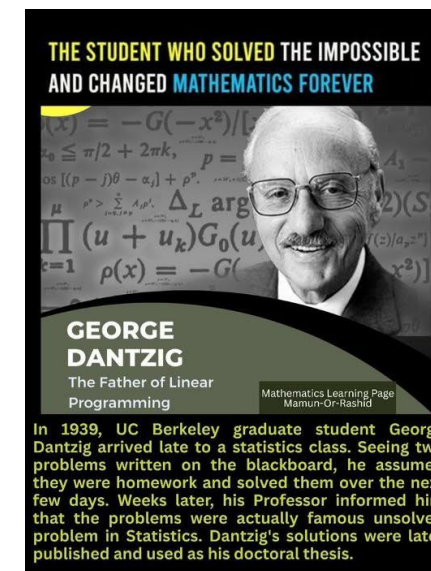
Ideea principală

- Caută soluția optimă printre soluțiile de bază admisibile
- Trece de la o soluție la alta prin îmbunătățirea valorii funcției obiectiv

Pașii metodei simplex

- 1) Formularea problemei ca model LP
- 2) Aducerea modelului la forma standard
- 3) Construirea tabloului simplex inițial
- 4) Alegerea pivotului și actualizarea tabloului
- 5) Interpretarea soluției optime

Algoritmul simplex a fost dezvoltat de George Dantzig, matematician american, în perioada în care lucra pentru Forțele aeriene ale SUA. Metoda a fost publicată în 1947.



Algoritmul simplex: exemplu

Ex: O firmă X importă componente electronice pentru a asambla două tipuri de calculatoare: desktop și laptop. Firma dorește să stabilească programul de producție săptămânal pentru cele două produse.

Un sistem desktop aduce un profit de **250 lei/unitate**, iar un laptop aduce un profit de **200 lei/unitate**.

Pentru săptămâna următoare, firma are disponibile cel mult **150 de ore** pentru asamblare. Un sistem desktop necesită **3 ore**, iar un laptop necesită **5 ore** de asamblare.

Firma are pe stoc doar **20 de ecrane** pentru laptopuri; prin urmare, pot fi asamblate cel mult **20 de laptopuri**.

De asemenea, firma poate utiliza cel mult **300 m²** pentru noua producție. Asamblarea unui sistem desktop necesită **8 m²**, iar asamblarea unui laptop necesită **5 m²**.

Variable de decizie

x_1 – numărul de sisteme desktop produse

x_2 – numărul de laptopuri produse

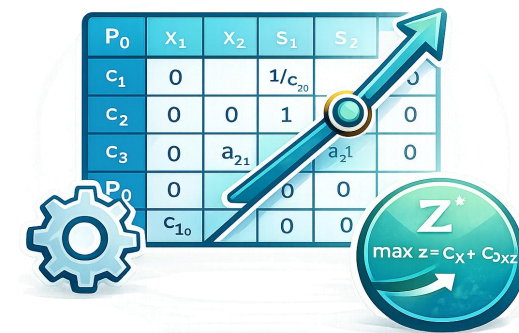
Model matematic

Max	$250x_1$	$+200x_2$		(funcția obiectiv)
s. t.	$3x_1$	$+5x_2$	≤ 150	(timp asamblare)
		$1x_2$	≤ 20	(ecran laptop)
	$8x_1$	$+5x_2$	≤ 300	(capacitate spațiu)
	$x_1,$	x_2	≥ 0	(nenegativitate)

Forma standard a problemei LP

Condiții pentru forma standard

- Toate variabilele trebuie să fie nenegative
- Toate constrângerile trebuie să fie egalități
 - Pentru constrângerile de tip „ $\leq$ ” se adaugă variabile de reducere s_i
 - Pentru constrângerile de tip „ $\geq$ ” se scad variabile de surplus s_i



$$\begin{array}{llll}
 \text{Max} & 250x_1 & +200x_2 & \\
 \text{s. t.} & 3x_1 & +5x_2 & \leq 150 \\
 & & 1x_2 & \leq 20 \\
 & 8x_1 & +5x_2 & \leq 300 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
 \end{array}$$

Forma standard
a exemplului

$$\begin{array}{llllllllll}
 \text{Max} & 250x_1 & +200x_2 & +0s_1 & +0s_2 & +0s_3 & & & & \text{(funcția obiectiv)} \\
 \text{s. t.} & 3x_1 & +5x_2 & +1s_1 & & & = 150 & & & \text{(timp asamblare)} \\
 & & 1x_2 & & +1s_2 & & = 20 & & & \text{(ecran laptop)} \\
 & 8x_1 & +5x_2 & & & +1s_3 & = 300 & & & \text{(capacitate spațiu)} \\
 & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq 0 & & & \text{(nenegativitate)}
 \end{array}$$

(3 ecuații, 5 necunoscute)

Interpretare algebrică

- Dacă numărul necunoscutelor este mai mare decât numărul ecuațiilor, există mai multe soluții posibile
- Algoritmul simplex caută soluția admisibilă care oferă cea mai bună valoare a funcției obiectiv
 - Soluțiile care nu respectă nenegativitatea nu sunt admisibile

Determinarea unei soluții de bază fezabile

În general, forma standard a problemei LP are n variabile (de decizie, de reducere, de surplus) și m ecuații liniare ($n > m$)

➤ **Soluția de bază** se determină egalând cu zero $n - m$ variabile și rezolvând sistemul de m ecuații pentru cele m necunoscute rămase

- **Variabile de bază:** cele m variabile determinate din sistem
- **Variabile secundare:** cele $n - m$ variabile egalate cu zero

$$\begin{array}{llllll} \text{Max} & 250x_1 & +200x_2 & +0s_1 & +0s_2 & +0s_3 \\ \text{s. t.} & 3x_1 & +5x_2 & +1s_1 & & \\ & & 1x_2 & & +1s_2 & \\ & 8x_1 & +5x_2 & & & +1s_3 \end{array} \begin{array}{l} = 150 \\ = 20 \\ = 300 \end{array}$$

O soluție de bază poate fi:

- **fezabilă/admisibilă**, dacă toate variabilele sunt nenegative
- **nefezabilă/neadmisibilă**, dacă cel puțin o variabilă este negativă

1) **Principiu:** $n = 5$, $m = 3$, alegem $n - m = 2$ variabile egale cu zero

2) **Alegere nefezabilă:** $x_2 = 0$, $s_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 50 \\ s_2 = 20 \\ s_3 = -100 < 0 \end{cases}$

3) **Alegere fezabilă:** $x_1 = 0$, $x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = 150 \\ s_2 = 20 \\ s_3 = 300 \end{cases}$

Concluzie

- Algoritmul simplex pornește de la o soluție de bază fezabilă și o îmbunătățește iterativ
- Soluția inițială pentru metoda simplex este:
 $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 150, 20, 300)$

Cuprins

Algoritmul simplex – procedură algebrică

Forma tablou / tabelară

- Tabloul simplex inițial
- Îmbunătățirea soluției

Următorul tablou

Rezumat

Forma tablou/tabelară: soluția inițială

Punct de plecare

Metoda simplex pornește de la o soluție de bază admisibilă

Pentru o problemă LP în formă standard:

- toate constrângerile sunt egalități
- toate variabilele sunt nenegative
- trebuie identificată o soluție inițială fezabilă/admisibilă

Constrângeri de tip „ $\leq$ ”

Pentru problemele de maximizare cu restricții de tip „ $\leq$ ”:

- se adaugă variabile de reducere
- variabilele de decizie se pot seta inițial la zero
- variabilele de reducere preiau valorile din membrul drept

Pentru exemplul curent

➤ Dacă $x_1 = 0$ și $x_2 = 0$, rezultă:
$$\begin{cases} s_1 = 150 \\ s_2 = 20 \\ s_3 = 300 \end{cases}$$

➤ Soluția inițială este: $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 150, 20, 300)$

Aceasta este **soluția inițială** utilizată pentru construirea **tabloului simplex**

Max	$250x_1$	$+200x_2$	$+0s_1$	$+0s_2$	$+0s_3$	
s. t.	$3x_1$	$+5x_2$	$+1s_1$			$= 150$
		$1x_2$		$+1s_2$		$= 20$
	$8x_1$	$+5x_2$			$+1s_3$	$= 300$
	$x_1,$	$x_2,$	$s_1,$	$s_2,$	s_3	≥ 0

Forma tablou/tabelară: condiții pentru tabloul inițial

- Pentru construirea tabloului simplex inițial, forma standard trebuie să permită identificarea directă a unei **soluții de bază admisibile**

Variabile de bază

1) Fiecare ecuație trebuie să conțină o variabilă de bază

O variabilă este de bază dacă are:

- coeficientul **+1** într-o singură ecuație
- coeficientul **0** în toate celelalte ecuații

Astfel, coloana unei variabile de bază are forma unei coloane din matricea unitate

Variabilă de bază = variabilă care poate fi determinată direct dintr-o ecuație atunci când variabilele secundare sunt egale cu zero

Un sistem de ecuații este în **formă tabelară** dacă, pentru fiecare ecuație corespunzătoare unei constrângeri:

- există o variabilă de bază
- valoarea din membrul drept este nenegativă

Membrul drept

2) Valorile din membrul drept (RHS) al constrângerilor trebuie să fie nenegative:

$$b_i \geq 0$$

Această condiție asigură că soluția de bază obținută este fezabilă/admisibilă

Interpretare: dacă variabilele secundare sunt egale cu zero, valorile variabilelor de bază se citesc direct din membrul drept

Variabile secundare	Variabile de bază
$x_1 = 0, x_2 = 0$	$s_1 = 150, s_2 = 20, s_3 = 300$

Construirea tabloului simplex inițial

- După aducerea problemei în formă tabelară, putem identifica soluția inițială de bază admisibilă
- Pentru aplicarea metodei simplex, construim **tabloul simplex inițial**

Notații

- c_j – coeficientul variabilei j în funcția obiectiv
- b_i – valoarea din membrul drept al constrângerii i
- a_{ij} – coeficientul variabilei j în constrângerea i

Această porțiune a **tabloului simplex inițial** conține:

- linia **c**: coeficienții funcției obiectiv
- matricea **A**: coeficienții variabilelor din constrângeri
- coloana **b**: valorile din membrul drept al constrângerilor

Linia $\mathbf{c}_{1 \times n}$	c_1	c_2	$\dots$	c_n	
	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1
	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	b_2
Matricea $\mathbf{A}_{m \times n}$			$\ddots$		$\vdots$
	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	b_m
					Coloana $\mathbf{b}_{m \times 1}$

Identificarea variabilelor de bază

- Pentru exemplul firmei X, evidențiem variabilele ale căror coeficienți apar în tabloul simplex inițial parțial:

$$\begin{array}{llllll}
 \text{Max} & 250x_1 & +200x_2 & +0s_1 & +0s_2 & +0s_3 \\
 \text{s. t.} & 3x_1 & +5x_2 & +1s_1 & & \\
 & & 1x_2 & & +1s_2 & \\
 & 8x_1 & +5x_2 & & & +1s_3 \\
 & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 \geq 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 = 150 \\
 = 20 \\
 = 300
 \end{array}$$

Tablou simplex
inițial parțial

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
250	200	0	0	0	
3	5	1	0	0	150
0	1	0	1	0	20
8	5	0	0	1	300

Soluția de bază
inițială admisibilă
se citește direct
din tabel

- 1) Coloanele variabilelor de bază sunt **coloane unitate**:
 - au singura componentă nenulă, egală cu **+1**
- 2) Rândul în care apare **+1** este asociat variabilei de bază respective
 - de exemplu, coloana lui s_1 are +1 pe primul rând, deci s_1 este variabila de bază asociată primei constrângeri
- 3) Valoarea variabilei de bază se citește din membrul drept b_i
 - de exemplu, $s_1 = b_1 = 150$

Variabile de bază inițiale: s_1, s_2, s_3
 Soluția inițială:
 $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 150, 20, 300)$

Completarea tabloului simplex inițial

➤ Pentru a îmbunătăți soluția inițială, metoda simplex modifică mulțimea variabilelor de bază

1) Adăugăm două coloane în stânga tabloului:

- **Bază** – numele variabilelor de bază
- **c_B** – coeficienții variabilelor de bază în funcția obiectiv

2) Adăugăm două linii la finalul tabloului:

- **z_j** – contribuția asociată variabilelor de bază
 - z_j = suma produselor dintre coeficienții c_B și elementele coloanei j din matricea A
- **$c_j - z_j$ – linia de evaluare netă**
 - indică modificarea valorii funcției obiectiv dacă variabila j intră în bază (profit marginal)

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
Bază	c_B	250	200	0	0	0	
s_1	0	3	5	1	0	0	150
s_2	0	0	1	0	1	0	20
s_3	0	8	5	0	0	1	300
z_j		0	0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		250	200	0	0	0	

Valoarea funcției obiectiv asociată cu soluția de bază admisibilă curentă
($0 \cdot 150 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 300$)

Din linia de evaluare netă observăm că:

- un sistem desktop (x_1) crește valoarea funcției obiectiv cu 250
- un laptop (x_2) crește valoarea funcției obiectiv cu 200

Tabloul simplex inițial este complet

Pentru o problemă de maximizare, variabila cu cea mai mare valoare pozitivă $c_j - z_j$ intră în bază
În acest caz: x_1 intră în bază

Îmbunătățirea soluției: criterii simplex

Pentru a trece la o soluție mai bună, metoda simplex schimbă baza:

- O variabilă secundară intră în bază
- O variabilă de bază iese din bază
- Această trecere se numește **iterație**

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i
		250	200	0	0	0	
s_1	0	3	5	1	0	0	150
s_2	0	0	1	0	1	0	20
s_3	0	8	5	0	0	1	300
z_j		0	0	0	0	0	0
$c_j - z_j$		250	200	0	0	0	

CRITERIU pentru introducerea unei noi variabile în bază

Pentru o problemă de maximizare, din linia de evaluare netă, $c_j - z_j$, se selectează variabila secundară cu cea mai mare valoare pozitivă

Dacă toate valorile $c_j - z_j \leq 0$, soluția curentă este optimă

- În caz de egalitate, se selectează variabila cea mai din stânga

În exemplu: $c_1 - z_1 = 250 > c_2 - z_2 = 200 \Rightarrow x_1$ intră în bază

CRITERIU pentru eliminarea unei variabile din bază

Se aplică **testul raportului minim**

Dacă variabila x_j intră în bază, pentru fiecare linie i se calculează raportul b_i/a_{ij} , doar pentru $a_{ij} > 0$. Variabila de bază asociată celui mai mic raport părăsește baza

- În caz de egalitate, se elimină variabila care se află cel mai sus în tablou

Îmbunătățirea soluției: alegerea pivotului

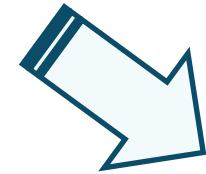
- După alegerea coloanei pivot, adăugăm în dreapta coloana cu rapoartele b_i/a_{ij} , calculate doar pentru $a_{ij} > 0$

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i	$\frac{b_i}{a_{i1}}$
		250	200	0	0	0		
s_1	0	3	5	1	0	0	150	$150/3 = 50$
s_2	0	0	1	0	1	0	20	—
s_3	0	8	5	0	0	1	300	$300/8 = 75/2$
z_j		0	0	0	0	0	0	
$c_j - z_j$		250	200	0	0	0		

linie pivot

element pivot

coloană pivot



- 1) Din linia $c_j - z_j$ alegem **coloana pivot**:
 - $\max(250, 200) = 250 \Rightarrow$ coloana x_1
- 2) Calculăm rapoartele b_i/a_{i1} , pentru $a_{i1} > 0$:
 - $150/3 = 50$
 - $300/8 = 37.5$
- 3) Alegem raportul minim:
 - $37.5 \Rightarrow$ **linia pivot** este s_3
- 4) **Elementul pivot** este 8

Concluzie: x_1 intră în bază, iar s_3 părăsește baza

Cuprins

Algoritmul simplex – procedură algebrică

Forma tablou / tabelară

Următorul tablou

- Interpretarea rezultatelor primei iterații
- Căutarea soluției optime
- Interpretarea soluției optime

Rezumat

Evaluarea următorului tablou: obiectivul transformării

- După alegerea pivotului, trebuie actualizat tabloul simplex



Obiectiv

transformarea coloanei variabilei care intră în bază într-o coloană unitate

După transformare:

- A devine $\bar{A}$, cu elementele $\bar{a}_{ij}$
- b devine $\bar{b}$, cu elementele $\bar{b}_i$

În exemplu, variabila care intră în bază locul lui s_3 este x_1 , deci

dorim ca noua coloană asociată lui x_1 să fie:
$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pentru aceasta folosim operații elementare pe linii:

- înmulțirea unei linii cu un număr nenul
- adunarea/scăderea unui multiplu al unei linii la/din altă linie

Aceste operații modifică valorile din tablou, dar păstrează sistemul de ecuații echivalent



Evaluarea următorului tablou: operații pe linii

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i	$\frac{b_i}{a_{i1}}$
s_1	0	3	5	1	0	0	150	$150/3 = 50$
s_2	0	0	1	0	1	0	20	—
s_3	0	8	5	0	0	1	300	$300/8 = 75/2$
z_j		0	0	0	0	0	0	
$c_j - z_j$		250	200	0	0	0		

Trebuie ca $\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Linia 2 rămâne nemodificată, deoarece coeficientul lui x_1 este 0

Normalizarea liniei pivot

Element pivot: 8

Pentru ca $\bar{a}_{31} = 1$, împărțim linia pivot la 8:

➤ $L_3^{\text{nouă}} = L_3 / 8$

$$L_3^{\text{nouă}}: 1x_1 + \frac{5}{8}x_2 + 0s_1 + 0s_2 + \frac{1}{8}s_3 = \frac{75}{2}$$

Anularea celorlalte valori din coloana pivot

Pentru ca $\bar{a}_{11} = 0$:

➤ $L_1^{\text{nouă}} = L_1 - 3 \cdot L_3^{\text{nouă}}$

$$L_1^{\text{nouă}}: 0x_1 + \frac{25}{8}x_2 + 1s_1 + 0s_2 - \frac{3}{8}s_3 = \frac{75}{2}$$

Evaluarea următorului tablou: noua bază

- Înlocuim linia pivot și linia 1 cu rezultatele obținute prin operațiile elementare pe linii
 ⇒ tablou obținut înainte de recalcularea liniilor z_j și $c_j - z_j$

- Noua bază este: s_1, s_2, x_1
- Noua soluție de bază admisibilă este:
 $x_1 = \frac{75}{2}, x_2 = 0, s_1 = \frac{75}{2}, s_2 = 20, s_3 = 0$
- Valoarea funcției obiectiv este:
 $0 \cdot \frac{75}{2} + 0 \cdot 20 + 250 \cdot \frac{75}{2} = 9375 \text{ lei}$

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}_i$
		250	200	0	0	0	
s_1	0	0	$25/8$	1	0	$-3/8$	$75/2$
s_2	0	0	1	0	1	0	20
x_1	250	1	$5/8$	0	0	$1/8$	$75/2$
z_j							9375
$c_j - z_j$							

- Soluția de bază inițială admisibilă a fost: $x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 150, s_2 = 20, s_3 = 300$
- Cu un profit corespunzător de **0 lei**

Concluzie: după o iterație a metodei simplex obținem o nouă soluție de bază admisibilă, cu profitul **9375 lei**

Căutarea unei soluții mai bune

- Pentru a vedea dacă se poate găsi o soluție de bază admisibilă mai bună, trebuie să calculăm liniile z_j și $c_j - z_j$ pentru noul tablou simplex

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}_i$	$\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}}$
s_1	0	0	$\frac{25}{8}$	1	0	$-\frac{3}{8}$	$\frac{75}{2}$	$\frac{75/2}{25/8} = 12$
s_2	0	0	1	0	1	0	20	$20/1 = 20$
x_1	250	1	$\frac{5}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{75}{2}$	$\frac{75/2}{5/8} = 60$
z_j		250	$\frac{625}{4}$	0	0	$\frac{125}{4}$	9375	
$c_j - z_j$		0	$\frac{175}{4}$	0	0	$-\frac{125}{4}$		

$$z_2 = 0 \cdot \frac{25}{8} + 0 \cdot 1 + 250 \cdot \frac{5}{8} = \frac{625}{4}$$

$$c_2 - z_2 = 220 - \frac{625}{4} = \frac{175}{4} > 0$$

Analizând linia de evaluare netă $\Rightarrow$ putem introduce în bază variabila x_2 , pentru îmbunătățirea valorii funcție obiectiv

- Pentru a determina ce variabilă părăsește baza atunci când intră x_2 , calculăm rapoartele $\bar{b}_i/\bar{a}_{i2}$, doar pentru $\bar{a}_{i2} > 0$

- Variabila de bază asociată celui mai mic raport părăsește baza

Concluzie: x_2 intră în bază, iar s_1 părăsește baza

Soluția optimă după două iterații

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}_i$	$\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}}$
		250	200	0	0	0		
s_1	0	0	$25/8$	1	0	$-3/8$	$75/2$	$\frac{75/2}{25/8} = 12$
s_2	0	0	1	0	1	0	20	$20/1 = 20$
x_1	250	1	$5/8$	0	0	$1/8$	$75/2$	$\frac{75/2}{5/8} = 60$
z_j		250	$625/4$	0	0	$125/4$	9375	
$c_j - z_j$		0	$175/4$	0	0	$-125/4$		

$$L_1^{\text{nouă}} = L_1 \cdot 8/25 \text{ (linie pivot)}$$

$$L_2^{\text{nouă}} = L_2 - L_1^{\text{nouă}}$$

$$L_3^{\text{nouă}} = L_3 - 5/8 \cdot L_1^{\text{nouă}}$$

➤ Trebuie efectuate operații pe linii astfel încât coloana x_2 să devină coloană unitate

Noul tablou simplu

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}_i$
		250	200	0	0	0	
x_2	200	0	1	$8/25$	0	$-3/25$	12
s_2	0	0	0	$-8/25$	1	$3/25$	8
x_1	250	1	0	$-1/5$	0	$1/5$	30
z_j		250	200	14	0	26	9900
$c_j - z_j$		0	0	-14	0	-26	

➤ Verificăm dacă soluția curentă mai poate fi îmbunătățită

- Analizând linia $c_j - z_j$, observăm că toate valorile sunt nule sau negative

⇒ Nu mai există o variabilă secundară care să poată intra în bază pentru a crește valoarea funcției obiectiv

Concluzie: tabloul reprezintă soluția optimă:

$x_1 = 30, x_2 = 12, s_1 = 0, s_2 = 8, s_3 = 0$, profit maxim 9900 lei

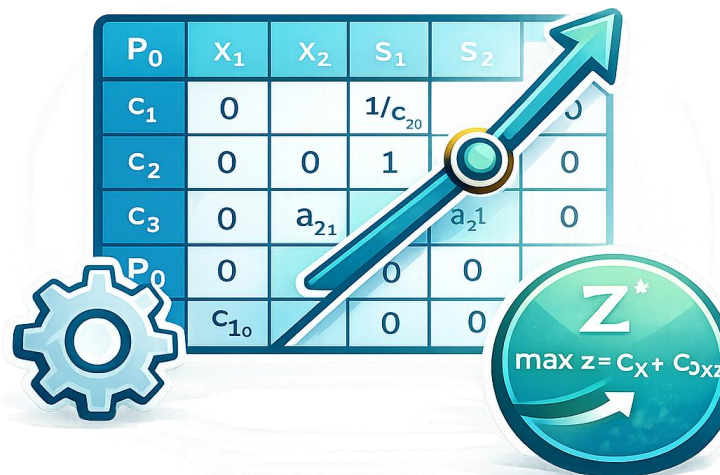
Criteriul de optimalitate

CRITERIUL de optimalitate

Pentru o problemă de maximizare, soluția de bază admisibilă curentă este optimă dacă toate valorile din linia de evaluare netă $c_j - z_j$ sunt nule sau negative:

$$c_j - z_j \leq 0, \forall j$$

Dacă există cel puțin o valoare pozitivă în linia $c_j - z_j$, soluția curentă poate fi îmbunătățită printr-o nouă iterație simplex



Soluția optimă: interpretare managerială

Bază	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$\bar{b}_i$
x_2	200	0	1	$8/25$	0	$-3/25$	12
s_2	0	0	0	$-8/25$	1	$3/25$	8
x_1	250	1	0	$-1/5$	0	$1/5$	30
z_j		250	200	14	0	26	9900
$c_j - z_j$		0	0	-14	0	-26	

➤ Din tabloul simplex final rezultă soluția optimă pentru problema firmei X:

- Variabilele de decizie: $x_1 = 30, x_2 = 12$
- Variabile de reducere: $s_1 = 0, s_2 = 8, s_3 = 0$
- Valoarea funcției obiectiv: **9900 lei**

Vor exista **8** ecrane neutilizate pentru laptopuri

Pentru maximizarea profitului total, firma trebuie să asambleze: **30 de sisteme desktop** și **12 laptopuri**

$s_1 = 0$ și $s_3 = 0$ indică faptul că restricțiile privind timpul de asamblare și spațiul disponibil sunt active

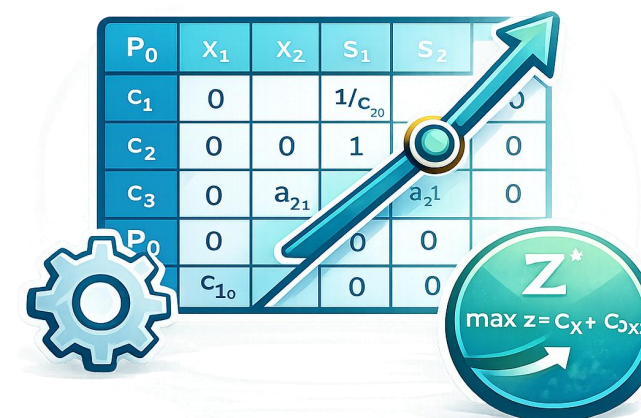
Dacă firma poate obține timp suplimentar de asamblare sau spațiu suplimentar, aceste resurse merită analizate

Coreșpondența dintre tabloul simplex și Excel Solver

	Variabile de decizie			
	Desktop (x1)	Portabil (x2)		
Calc asamblate	30.00	12.00		
Maximizare profit total		9900		
Constrangeri	Folosit		Disponibil	Ramas
Timp asamblare [h]	150.00	<=	150	0.00
Ecran disponibil [buc]	12.00	<=	20	8.00
Capacitate spatiu [mp]	300.00	<=	300	0.00

Soluția optimă:
 $x_1 = 30, x_2 = 12$,
 profit maxim 9900 lei

Variabilele de reducere:
 $s_1 = 0, s_2 = 8, s_3 = 0$



Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$16	Calc asamblate Desktop (x1)	30	0	250	70	130
\$C\$16	Calc asamblate Portabil (x2)	12	0	200	216.6666667	43.75

Costul redus corespunde **liniei de evaluare netă** $c_j - z_j$ pentru variabilele de decizie

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$21	Timp asamblare [h]	150	14	150	25	37.5
\$B\$22	Ecran disponibil [buc]	12	0	20	1E+30	8
\$B\$23	Capacitate spatiu [mp]	300	26	300	100	66.66666667

Prețul umbră corespunde **valorilor z_j** din coloanele variabilelor de reducere

Pentru restricțiile active, prețul umbră arată creșterea profitului dacă resursa disponibilă crește cu o unitate

Observații: cost redus și preț umbră

Cost redus

Intrările din linia de evaluare netă $c_j - z_j$ corespund costurilor reduse din rapoartele de sensibilitate ale programelor LP

Costul redus arată cu cât trebuie să se îmbunătățească coeficientul funcției obiectiv al unei variabile neincluse în soluție pentru ca aceasta să poată deveni pozitivă într-o soluție optimă

În funcție de convenția de semn utilizată, unele programe pot afișa costul redus cu semn opus

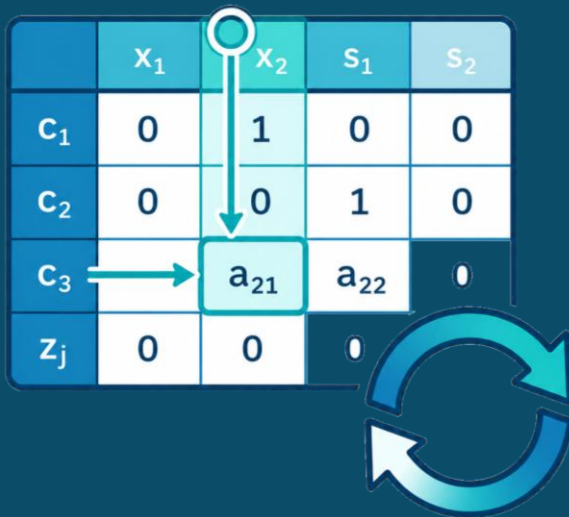
Pentru variabilele incluse în baza optimă, costul redus este 0

Preț umbră

Valorile z_j asociate coloanelor variabilelor de reducere corespund prețurilor umbră ale restricțiilor

Prețul umbră arată modificarea valorii funcției obiectiv dacă membrul drept al unei constrângeri crește cu o unitate, în intervalul de validitate al soluției

Rezumat

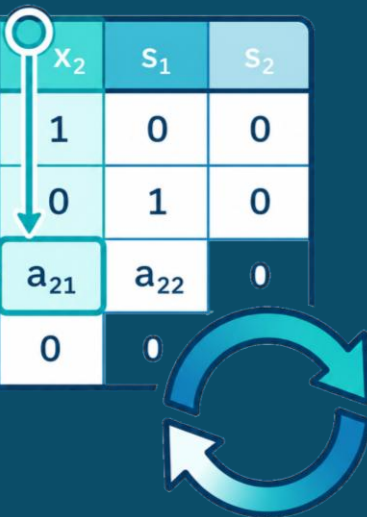


	x_1	x_2	s_1	s_2
c_1	0	1	0	0
c_2	0	0	1	0
c_3		a_{21}	a_{22}	0
z_j	0	0	0	0

- Pentru o problemă de maximizare cu toate constrângerile de forma „ $\leq$ ” și cu valori nenegative în membrul drept:
 - 1) Se formulează modelul LP al problemei
 - 2) Se adaugă variabile de reducere pentru transformarea constrângerilor în egalități
 - Se obține forma standard
 - Forma standard permite identificarea unei soluții inițiale de bază admisibile
 - 3) Se construiește tabloul simplex inițial
 - 4) Se alege variabila care intră în bază
 - Se analizează linia de evaluare netă $c_j - z_j$
 - Pentru o problemă de maximizare, se alege variabila secundară cu cea mai mare valoare pozitivă
 - Această variabilă identifică coloana pivot
 - 5) Se alege variabila care părăsește baza
 - Se aplică testul raportului minim
 - se calculează raportul b_i/a_{ij} doar pentru $a_{ij} > 0$, unde j este coloana pivot
 - linia cu raportul minim devine linia pivot

Rezumat

	x_1	x_2	s_1	s_2
c_1	0	1	0	0
c_2	0	0	1	0
c_3		a_{21}	a_{22}	0
z_j	0	0	0	0



- 6) Se efectuează operații elementare pe linii pentru ca variabila care intră în bază să formeze o coloană unitate
 - a) Se împarte linia pivot la elementul pivot
 - Elementul pivot devine 1
 - b) Se obțin zerouri în toate celelalte poziții ale coloanei pivot
 - Se adaugă sau se scade un multiplu corespunzător al noii linii pivot
 - După actualizarea tabloului, noua soluție de bază admisibilă se citește din coloana membrului drept
- 7) Se testează optimalitatea:
 - pentru o problemă de maximizare, dacă $c_j - z_j \leq 0$ pentru toate coloanele, soluția este optimă
 - dacă există cel puțin o valoare pozitivă în linia $c_j - z_j$, se revine la pasul 4

Observație: Pașii sunt similari și pentru probleme cu restricții de tip „=” sau „ $\geq$ ”, dar diferă modul de construire a formei tabelare inițiale

Cuprins

Algoritmul simplex – procedură algebrică

- ✓ Forma standard
- ✓ Proprietăți algebrice
- ✓ Soluția de bază
- ✓ Soluția de bază admisibilă

Forma tablou / tabelară

- ✓ Tabloul simplex inițial
- ✓ Îmbunătățirea soluției

Următorul tablou

- ✓ Interpretarea rezultatelor primei iterații
- ✓ Căutarea soluției optime
- ✓ Interpretarea soluției optime
- ✓ Corespondența cu Excel Solver

→ Programarea liniară: algoritmul simplex (II)